Comportamiento de un péndulo real sin rozamiento

Carlos E. Solivérez*

Introducción

Los péndulos tienen importantes aplicaciones prácticas en Mecánica y son, junto con los resortes, el prototipo matemático de los sistemas físicos periódicos, el punto de partida para su discusión.

En el tratamiento elemental del péndulo se hacen 3 suposiciones cuya única justificación es simplificar la resolución de la ecuación diferencial que describe su movimiento:

- masa oscilante concentrada en un volumen muy pequeño (aproximación de masa puntual);
- amplitudes de oscilación pequeñas (pequeñas oscilaciones);
- movimiento sin rozamiento (no amortiguado).

Los péndulos reales no están formados por masas puntuales, sus oscilaciones pueden ser de gran amplitud y las fuerzas de rozamiento siempre causan la detención del movimiento en un lapso de tiempo finito. En esta nota se calcula el período de un péndulo sin hacer las 2 primeras aproximaciones, dejando la eliminación de la 3ª para un trabajo posterior.

La discusión de los péndulos reales no amortiguados puede hacerse con poco más que la aplicación del Principio de Conservación de la Energía. Se puede obtener su amplitud de oscilación a partir de las condiciones iniciales, establecer las condiciones en que hay periodicidad, calcular el período y su dependencia con la amplitud. Todo esto puede hacerse sin que, aparentemente, se haya resuelto la ecuación diferencial. En realidad, como se verá, el Principio de Conservación de la Energía Mecánica constituye la primer integración respecto de las coordenadas de la ecuación diferencial de segundo orden respecto del tiempo, cuando las fuerzas intervinientes son funciones de punto. La constante de integración —la energía total— es la más importante constante física del movimiento y su valor determina la posibilidad de aparición del régimen oscilatorio.

Ecuación diferencial

La ecuación del movimiento de un cuerpo rígido capaz de rotar un ángulo θ alrededor del punto de suspensión S, con momento de inercia I, bajo la acción de la cupla gravitatoria τ es

$$I \cdot d^2\theta/dt^2 = \tau,$$

donde θ es el ángulo en radianes y $d\theta/dt$ la velocidad angular de rotación ω. Como se ve en la Figura 1, para un péndulo real la cupla es $\tau = -\, l \cdot P \cdot \mathrm{sen}(\theta)$, donde l es la distancia del punto de suspensión S al centro de masa C, $P = m \cdot g$ es el peso, m la masa, g la aceleración de la gravedad y θ el ángulo de apartamiento de la vertical (posición de equilibrio estable) con el sentido positivo indicado por la flecha. Entonces, la ecuación diferencial del movimiento es

$$I \cdot d^2\theta/dt^2 + l \cdot P \cdot \mathrm{sen}(\theta) = 0. \qquad (1)$$

Para pequeños apartamientos ($\theta \ll 1$) y masa muy concentrada ($I = m \cdot l^2$) la ec. (1) puede aproximarse por

---

* Véase esbozo biográfico en http://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Usuario:Csoliverez.

$$d^2\theta/dt^2 + k^2\cdot\theta = 0, \quad \text{donde} \quad k = \sqrt{(g/l)},$$

denominada ecuación armónica. Como puede verificarse por derivación, su solución general, correspondiente al llamado péndulo ideal, es la función periódica

$$\theta(t) = c_1\cdot\cos(k\cdot t) + c_2\cdot\mathrm{sen}(k\cdot t),$$

que también puede escribirse

$$\theta(t) = \theta_m\cdot\cos(k\cdot t+\varphi),$$

donde θ_m es la amplitud de la oscilación, φ la fase y $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{(l/g)}$ el período, que en este caso es independiente de la masa y su distribución espacial.

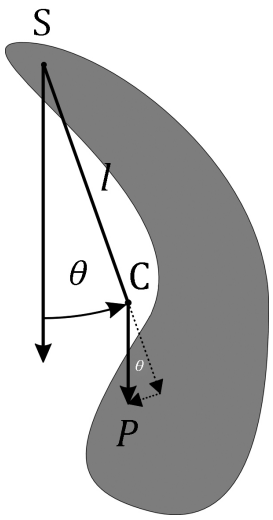

Figura 1. Péndulo real.

La ecuación diferencial (1) no contiene funciones que dependan explícitamente del tiempo, por lo que se puede hacer una primera integración respecto de θ de la siguiente manera. Como $d\theta/dt = \omega$,

$$d^2\theta/dt^2 = d\omega/dt = (d\omega/d\theta)\cdot(d\theta/dt) = \omega\cdot d\omega/d\theta.$$

La ec. (1) puede entonces reescribirse

$$I\cdot d^2\theta/dt^2 + l\cdot P\cdot\mathrm{sen}(\theta) = I\cdot\omega\cdot d\omega/d\theta + l\cdot P\cdot\mathrm{sen}(\theta) = 0,$$

ó

$$I\cdot\omega\cdot d\omega + l\cdot P\cdot\mathrm{sen}(\theta)\cdot d\theta = 0.$$

Evaluando la integral definida de cada término, donde los extremos deben corresponderse, se obtiene

$$\int_{\omega(0)}^{\omega(\theta)} I\cdot\omega\cdot d\omega + \int_0^{\theta} l\cdot P\cdot\mathrm{sen}(\theta)\cdot d\theta = \tfrac{1}{2}I\cdot\omega(\theta)^2 - \tfrac{1}{2}I\cdot\omega(0)^2 - [l\cdot P\cdot\cos(\theta) - l\cdot P\cdot\cos(0)] = 0.$$

Reordenando términos se puede ver que la ecuación anterior no es sino el Principio de Conservación de la Energía Mecánica. Para ello se pasan al segundo miembro los términos correspondientes al extremo inferior de integración, obteniendo

$$\tfrac{1}{2}I\cdot\omega(\theta)^2 - l\cdot P\cdot\cos(\theta) = \tfrac{1}{2}I\cdot\omega(0)^2 - l\cdot P. \qquad (2)$$

El primer término de cada miembro es la energía cinética de rotación, mientras que el segundo es la energía potencial gravitatoria $V(\theta)$. Si el origen de $V(\theta)$ es el punto más bajo de la trayectoria ($\theta = 0$), con sentido positivo hacia arriba,

$$V(\theta) = -\int_0^h (-P)\cdot dh = P\cdot h = P\cdot[l - l\cdot\cos(\theta)] = l\cdot P\cdot[1-\cos(\theta)].$$

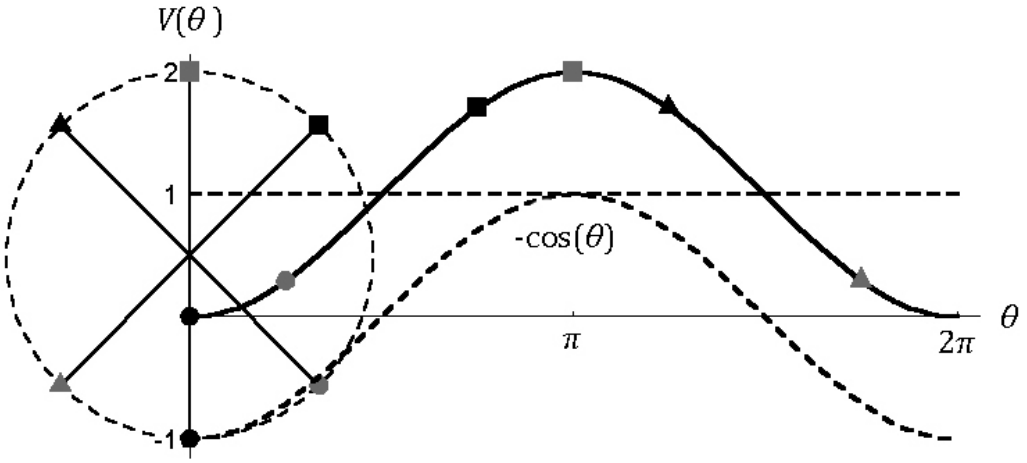

Figura 2. Energía potencial del péndulo real.

Esta expresión es válida para cualquier valor de θ y se grafica en la Figura 2. Las marcas sobre el círculo de trazos de la izquierda son posiciones del centro de masa C del péndulo, mientras que las marcas sobre la curva de trazo continuo de la derecha son los correspondientes valores de la energía potencial. Es interesante comparar esta figura con la que se obtendría para el péndulo ideal, donde la energía potencial es una función divergente de θ.

Sumando $l \cdot P$ a ambos miembros, la ec. (2) se puede reformular así:

$$I \cdot \omega^2/2 + l \cdot P \cdot [1 - \cos(\theta)] = E_c + V = E_M,$$

donde E_c es la energía cinética de rotación, V la energía potencial gravitatoria y E_M la energía mecánica total del sistema. La expresión es válida para tiempo t arbitrario. E_M es independiente de t y siempre igual a la suma de la energía cinética y potencial. El comportamiento del sistema rotante, en particular su carácter periódico o aperiódico, depende críticamente del valor de E_M, tema que se analiza a continuación.

Análisis energético

A diferencia del péndulo ideal —que siempre oscila— el real puede tener 2 comportamientos totalmente diferentes según la energía inicial que se le proporcione, sea en forma cinética o potencial. El péndulo recibe energía exclusivamente potencial cuando se levanta su centro de masa C hasta una posición angular θ_0 y se lo libera desde allí con velocidad inicial nula. Recibe energía exclusivamente cinética cuando en la posición de equilibrio estable $\theta = 0$ se le imprime velocidad inicial v_0. En el caso general puede proporcionarse ambos tipos de energía liberándolo desde una posición inicial $\theta_0 \neq 0$ con velocidad inicial v_0 no nula.

La mínima energía E_M necesaria para llevar el centro de masa a la posición más alta (a altura l sobre el punto de suspensión) es $2l \cdot P$. Cuando $E_M \leq 2l \cdot P$ el cuerpo no puede dar más de una revolución completa. En ese caso:

1. el centro de masa alcanza su posición angular extrema $\pm\theta_m$ cuando la energía cinética (la velocidad) es nula y la energía potencial es máxima;
2. el centro de masa alcanza su velocidad extrema $\pm v_m$ (energía cinética máxima) cuando la energía potencial es mínima (que con elección de origen hecha es $V = 0$).

Se puede entonces calcular la amplitud θ_m y la velocidad máxima $v_m = l \cdot \omega_m$ en función de E_M a partir de la expresión de la energía mecánica total

$$E_M = I \cdot \omega^2/2 + l \cdot P \cdot [1 - \cos(\theta)] = E_c + V = I\,\omega_m^2/2 = l \cdot P \cdot [1 - \cos(\theta_m)]. \qquad (3)$$

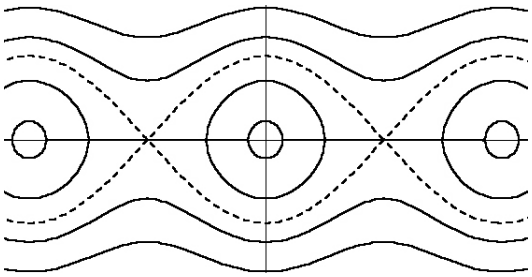

Figura 3.
Péndulo real en el espacio de las fases θ — ω.

A pesar de que la energía potencial es siempre periódica en θ, el movimiento del péndulo es periódico sólo en el rango $E_M < 2l \cdot P$. Esto se ve claramente en el diagrama de trayectorias en el espacio de las fases θ — ω. Esta trayectoria se obtiene despejando ω de la ec. (3):

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2}{I}\left(E_M - l \cdot P \cdot \left[1 - \cos(\theta_m)\right]\right)}. \qquad (4)$$

Las ramas que corresponden al sentido positivo de rotación son las curvas del semiplano superior de la Figura 3; las del negativo son las del semiplano inferior.

Las curvas cerradas, identificatorias del comportamiento periódico, corresponden a

$E_M < 2l{\cdot}P$. Las curvas ondulantes corresponden al caso no periódico $E_M > 2l{\cdot}P$, donde el péndulo no oscila sino rota con velocidad variable, máxima en la parte más baja, mínima en la parte más alta del recorrido. Este comportamiento es similar al del carrito de una montaña rusa: si no se le proporciona la energía cinética mínima necesaria para remontar la primera cuesta, vuelve al lugar de partida; si se la energía es suficiente, la superará continuando su movimiento. Con el péndulo sucede exactamente lo mismo.

Las curvas de trazo discontinuo corresponden al caso límite, $E_M = 2l{\cdot}P$, que separa la región de comportamiento periódico de la no periódica. El comportamiento en este caso, que puede resolverse de manera exacta, se discute a continuación.

Caso límite $E_M = 2l{\cdot}P$

La primera idea que acude a la mente es que este caso es sólo uno más de comportamiento periódico y que el péndulo oscilará alcanzando la altura máxima, con el período que corresponda. Esta hipótesis no puede ser correcta porque tanto la velocidad como la cupla son nulas en el punto superior, de manera que una vez alcanzado éste no hay impulso ni fuerza de restitución que tienda a sacarlo de allí. Está claro que, por ser el equilibrio inestable, cualquier perturbación tenderá a hacerlo, pero la ecuación no incluye tales perturbaciones. Una pregunta interesante es ¿cuanto tiempo demora el cuerpo en llegar a la cúspide? Para responderla hay que resolver la ecuación diferencial para este valor límite de energía, resolución que es casi trivial comparada con la del caso $E_M < 2l{\cdot}P$.

Se tiene entonces

$$I{\cdot}\omega^2/2 + l{\cdot}P{\cdot}[1 - \cos(\theta)] = E_M = 2l{\cdot}P,$$

que permite despejar ω para obtener

$$\omega = \sqrt{\frac{2l{\cdot}P}{I}\left(1+\cos(\theta)\right)}.$$

Como $1+\cos(\theta) = 1+\cos^2(\theta/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2)$, la expresión de ω resulta ser

$$\omega = \pm\frac{d\theta}{dt} = \pm 2\sqrt{\frac{l{\cdot}P}{I}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

El doble signo corresponde a los dos posibles sentidos que puede tener la velocidad angular para un mismo valor de θ, según el péndulo esté "de ida" o "de vuelta". La ecuación diferencial puede resolverse para t en función de θ, separando variables de la siguiente manera:

$$\frac{d\theta}{\cos(\theta/2)} = \pm 2\sqrt{\frac{l{\cdot}P}{I}}\,dt.$$

Integración sobre t en el intervalo $[0;t]$ y sobre θ en el intervalo correspondiente $[\theta_0;\theta(t)]$, donde $\theta_0 = \theta(0)$ se obtiene

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos(\theta/2)} = \pm\sqrt{\frac{l{\cdot}P}{I}}\,t. \qquad (5)$$

La primera integral, que puede encuentrarse en cualquier buena tabla de primitivas[1], es

1 Véase, por ejemplo, G. Korn y T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, EEUU-Canadá-Inglaterra-Australia, 1968 (2ª edición). Apéndice E, Integrales, pp. 925-980. En esta tabla la primitiva buscada es la Nº 325.

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta/2)} = 2\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

resultado que puede verificarse por derivación. Reemplazando en la ec. (5) se obtiene

$$\ln\left(\frac{\mathrm{tg}\left((\theta/4+\pi/4\right)}{\mathrm{tg}\left(\theta_0/4+\pi/4\right)}\right) = \pm\sqrt{\frac{l\cdot P}{I}}t = \pm k\cdot t,$$

donde $k = \sqrt{(l\cdot P/I)}$, constante que se reduce a la del péndulo ideal cuando el momento de inercia puede aproximarse por el de una masa puntual.

Las dos soluciones de este caso límite son entonces

$$\mathrm{tg}(\theta/4+\pi/4) = \mathrm{tg}(\theta_0/4+\pi/4)\ \mathrm{e}^{\pm k\cdot t}.$$

Cuando el origen del tiempo se elige en $\theta_0 = 0$, las funciones $\theta^{\pm}(t)$ son las que se representan en la Figura 4, donde la curva de trazo continuo corresponde a $\mathrm{e}^{+k\cdot t}$, y el recorrido se hace de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. Para $\mathrm{e}^{-k\cdot t}$ (línea de trazo discontinuo) el recorrido se hace en sentido contrario, de $\theta = 0$ a $\theta = -\pi$. Se ve así que si el péndulo parte de la posición de equilibrio estable, necesita un lapso de tiempo infinito para arribar a la cúspide. Esto corresponde al límite en que el período tiende a infinito, es decir, cuando la función deja de ser periódica.

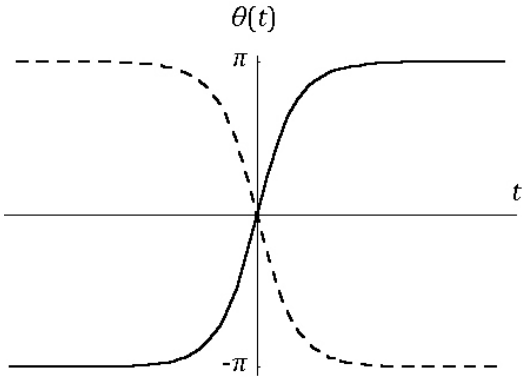

Figura 4.
Comportamiento límite del péndulo real.

Cálculo del período.

La discusión previa dejó bien establecido que sólo hay comportamiento periódico cuando $E_M < 2l\cdot P$. En este caso es conveniente escribir (véase ec. (3))

$$E_M = l\cdot P\cdot[1 - \cos(\theta_m)]$$

que reemplazada en la ec. (4) da

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{I}\left(E_M - V(\theta)\right)} = \pm\sqrt{\frac{2l\cdot P}{I}\left(\cos(\theta)-\cos(\theta_m)\right)}, \quad \theta \le \theta_m.$$

Esta ecuación puede integrarse igual que en el caso límite para obtener

$$dt = \pm\sqrt{\frac{I}{2l\cdot P}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}}, \quad \theta \le \theta_m. \tag{5}$$

El lapso de tiempo transcurrido entre el instante $\theta = 0$ y aquél en el cual $\theta = \theta_m$ es un cuarto del período T. Entonces,

$$\frac{T}{4} = \int_0^{t_m} dt = \sqrt{\frac{I}{2l\cdot P}}\int_0^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}}.$$

Cuando $\theta_m = \pi$ la integral es la calculada en la ec. (5) y es fácil verificar que el período resulta infinito. Cuando $\theta_m \neq \pi$ la integral no puede expresarse en término de funciones elementales, debiendo calcularse mediante desarrollos en serie o métodos numéricos apropiados. Debido a que esta integral aparece con frecuencia en aplicaciones técnicas, la

función que define (que es parte de una familia mayor de funciones vinculadas) ha merecido tener un nombre, el de Integral Elíptica Completa de Primera Especie,[2]

$$\mathrm{K}(\mathrm{sen}(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(2\alpha)}} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}}.$$

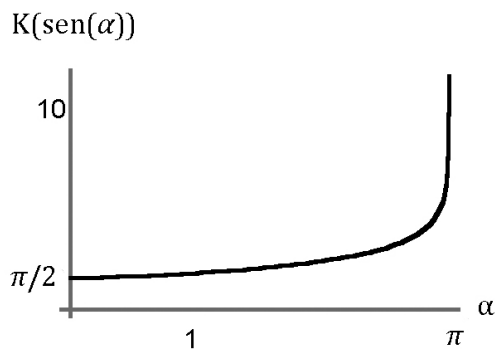

Figura 5.
Período en función de la amplitud.

El valor de la función K(sen(α)) puede obtenerse de tablas[3] o calcularse usando programas de computadora como *Mathematica*® o mediante el algoritmo que se dará más adelante. Su dependencia de α, que se muestra en la Figura 5, hace que el período del péndulo real sea una función creciente de la amplitud. Para amplitudes pequeñas la curva es casi horizontal, constante, con valor cercano a $\pi/2$. Se puede verificar fácilmente que en la aproximación de masa puntual el valor del período coincide con el calculado para el péndulo ideal al comienzo de este documento.

Cuando se hacen prácticas de laboratorio, frecuentemente se calcula el período

$$T = 4\sqrt{\frac{I}{l\cdot P}}\,\mathrm{K}\left(\mathrm{sen}\left(\theta_{\mathrm{m}}/2\right)\right) \tag{6}$$

haciendo un desarrollo en serie de la integral elíptica para corregir la dependencia del período con la amplitud. Ésto, además de ser impreciso y engorroso, no es necesario ya que hay un método simple y de rápida convergencia para calcular el valor de la integral elíptica K: el de la media aritmética-geométrica.[4] La media aritmética-geométrica de dos números a_0, b_0, es el número obtenido mediante el algoritmo de recurrencia consistente en remplazar el primer número del par por la media aritmética del par y el segundo número por la media geométrica y así sucesivamente a partir de cada nuevo par obtenido. Los dos primeros pasos de esta relación de recurrencia son:

$$a_1 = (a_0 + b_0)/2 \text{ (media aritmética)}, \quad b_1 = \sqrt{(a_0\, b_0)} \text{ (media geométrica)},$$
$$a_2 = (a_1 + b_1)/2, \quad b_2 = \sqrt{(a_1\, b_1)}.$$

Se continúa hasta encontrar el par enésimo para el cual los valores de a_n y b_n coinciden entre sí con la precisión deseada. Para calcular la función K(sen(α)) con este método se usan los valores iniciales a_0=1 y b_0=cos(α). Si $a_n = b_n$ dentro de la precisión deseada, entonces el valor buscado esK(sen(α)) = $\pi/2a_n$.

La tabla inferior ilustra la rapidez con que converge el par inicial al valor deseado con una precisión de tres dígitos (error menor que el 1%) para $\theta_m = \pi/2$, o sea, $\alpha = \pi/4$. El valor inicial es $b_0 = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} = 0{,}70711$ y los cálculos se hicieron con una calculadora de bolsillo.

---

[2] La reducción de la integral original a la forma canónica del último miembro, mediante sucesivos cambios de la variable de integración, se da en el Apéndice.

[3] Véase, por ejemplo, M. Abramowitz e I. A. Stegun (compiladores), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (EEUU), 1965, p. 590.

[4] Abramowitz, p. 599.

Orden	0	1	2	3
a	1	0,85355	0,84722	0,84721
b	0,70711	0,84090	0,84720	0,84721

La 3ª iteración se da sólo a título ilustrativo ya que la precisión deseada se logró en la 2ª. El valor resultante de la integral elíptica es K = 1,85 en total concordancia con los valores tabulados. No hacer la corrección por amplitud, como en el péndulo ideal, equivale a usar el valor K = π/2 =1,57 cometiendo un nada despreciable error relativo del 18%.

Solución completa de la ecuación del movimiento

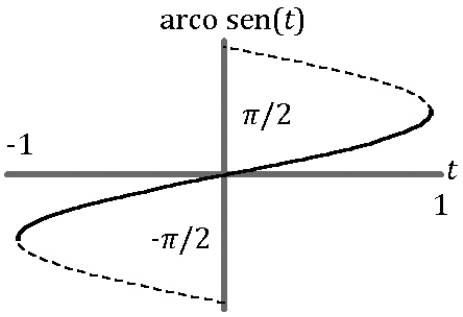

Figura 6.
Función multivaluada arco seno.

La solución de la ecuación diferencial del péndulo real se obtiene integrando la ec. (6). La integral resultante no define la función $\theta = f(t)$ sino su inversa, $t = g(\theta) = f^{-1}(\theta)$. Como $f(t)$ es una función periódica de período T dado por (7), su inversa es una función multivaluada que está unívocamente definida sólo en un intervalo de longitud $T/2$, por ejemplo $[\theta_1;\theta_1+T/2]$. La razón de esta limitación se comprende analizando, por ejemplo, la funcion trigonométrica inversa arco sen(t) de la Figura 6. El tramo central de trazo continuo define, en el intervalo de ordenadas del semiperíodo $[-\pi/2;\pi/2]$, una función uniforme (univaluada) pero hay infinitos intervalos por encima o debajo de éste donde la función también toma valores.

Las dos ramas (la positiva y la negativa) que se obtienen por integración de la ec. (6) permiten construir un semiperíodo de $g(\theta)$ comenzando (o terminando) con cualquier valor de θ. Basta construir la función para el semiperíodo más fácil de calcular, ya que todos son iguales, por lo que se integra la ecuación diferencial (6) sobre t en el intervalo $[t;T/4]$ y, de manera correspondiente, sobre θ en $[\theta;\theta_m]$. Se obtiene así

$$\frac{T}{4} - t = \sqrt{\frac{I}{2l\cdot P}}\int_{\theta}^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_m)}} = \sqrt{\frac{I}{l\cdot P}}\int_{\varphi}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\cdot\mathrm{sen}^2(\varphi)}}, \quad -\theta_m \le \theta \le \theta_m,$$

donde la segunda integral se obtiene de la misma manera que en el anterior cálculo del período. Nótese que (omitiendo, por simplicidad, la escritura del integrando)

$$\int_{\varphi}^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} - \int_0^{\varphi} .$$

Se tiene entonces que

$$\frac{T}{4} - t = \sqrt{\frac{I}{l\cdot P}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}} - \sqrt{\frac{I}{l\cdot P}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\cdot\mathrm{sen}^2(\varphi)}} = \frac{T}{4} - \mathrm{F}\big(\varphi \backslash \mathrm{sen}(\alpha)\big).$$

Se usó aquí la ec. (7) y la definición de la Integral Elíptica de Primera Especie[5]

$$\mathrm{F}\big(\varphi \backslash \mathrm{sen}(\alpha)\big) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\cdot\mathrm{sen}^2(\varphi)}},$$

de la cual K es el caso especial $\varphi = \pi/2$.

[5] Abramowitz, p. 589.

Resulta entonces que

$$t = \sqrt{\frac{I}{l \cdot P}}\,\mathrm{F}\big(\varphi \backslash \operatorname{sen}(\theta_{\mathrm{m}}/2)\big), \quad -\theta_{\mathrm{m}} \le \theta \le \theta_{\mathrm{m}}.$$

En la Figura 7 se grafica la dependencia de F con θ para $\theta_{\mathrm{m}} = \pi/2$. Las líneas de trazos identifican los tramos adicionales que fue necesario incorporar para representar un período completo (véase la discusión inicial de la sección). Para comparación se ha graficado también, en trazo gris, la función sinusoidal del mismo período y amplitud, de la que difiere poco.

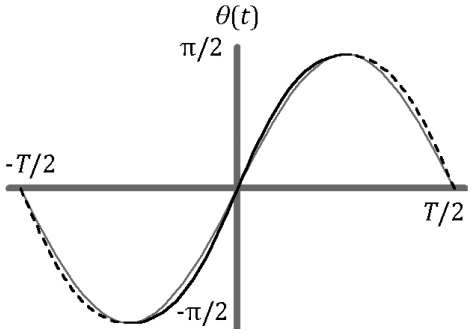

Figura 7. Gráfico de $\theta(t)$ para $\theta_{\mathrm{m}} = \pi/2$.

Comparación con el péndulo ideal

Las principales diferencias entre el péndulo ideal —masa concentrada que oscila con pequeña amplitud— y el péndulo real sin rozamiento son las siguientes:

- Mientras que el período del péndulo ideal $2\pi\sqrt{(l/g)}$ es independiente de la masa y forma del cuerpo, el período del péndulo real depende de la distribución espacial (y de homogeneidad) de la masa a través del valor de $\sqrt{[I/(l \cdot m \cdot g)]}$. Por ejemplo, para una esfera homogénea de radio r, $I = m \cdot l^2 + 2m \cdot r^2/5$.
- Al igual que en el péndulo ideal, el período del péndulo es aproximadamente constante para pequeñas oscilaciones pero aumenta con la amplitud y tiende a hacerse infinito (movimiento no periódico) cuando la amplitud tiende a π.
- La variación temporal del ángulo de oscilación $\theta(t)$ difiere poco de la sinusoide correspondiente al péndulo ideal.

Conclusiones

El péndulo real ilustra importantes propiedades físicas de sistemas mecánicos oscilatorios, a la vez que métodos generales de resolución de ecuaciones diferenciales basados en principios cruciales como el de conservación de la energía. A pesar de que el tratamiento no requiere otros saberes de Análisis Matemático que los dados en un primer curso del tema, es muy difícil encontrarlo detalladamente discutido en los tratados de Mecánica, razón por la que se he llevado a cabo este trabajo. Las complicaciones que introduce el rozamiento son significativas, razón por la que no se ha tratado aquí el tema. Su tratamiento puede ser una buena introducción al estudio de sistemas disipativos, pero requiere conocimientos más avanzados de Análisis Matemático.

Apéndice

Reducción de la integral elíptica a forma normal

Se demuestra a continuación la igualdad de los dos últimos miembros de la siguiente ecuación, mencionada en la página 6:

$$\mathrm{K}\left(\mathrm{sen}(\alpha)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_\mathrm{m}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_\mathrm{m})}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)\cdot\mathrm{sen}^2(\varphi)}}.$$

La segunda integral, salvo un eventual reemplazo de sen*(α)* por una variable tal como *m*, es la forma estándar o canónica de la Integral Elíptica Completa de Segunda Especie. Para reducir la primera integral a la segunda hay que hacer sucesivos cambios de la variable de integración.

Nótese, en primer lugar, que

$$\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2),$$

$$\cos(\theta) - \cos(\theta_\mathrm{m}) = 2[\mathrm{sen}^2(\theta_\mathrm{m}/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2)].$$

Se hace luego un cambio de variable tal que mantenga el extremo inferior de integración (0) y transforme el segundo, θ_m, en $\pi/2$. Un reemplazo apropiado es

$$\mathrm{sen}(\theta/2) = \mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)\,\mathrm{sen}(\varphi),$$

ya que entonces a $\theta = 0$ corresponde $\varphi = 0$;y a $\theta = \theta_\mathrm{m}$ corresponde $\varphi = \pi/2$. Derivando la ecuación anterior se obtiene la relación entre diferenciales

$$\cos(\theta/2)\cdot\mathrm{d}\theta/2 = \mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)\cdot\cos(\varphi)\cdot\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}\theta = 2\,\mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)\cdot\cos(\varphi)\cdot\mathrm{d}\varphi\,/\,\cos(\theta/2).$$

Se puede escribir $\cos(\theta/2)=\sqrt{[1 - \mathrm{sen}^2(\theta/2)]} = \sqrt{[1 - \mathrm{sen}^2(\theta_\mathrm{m}/2)\,\mathrm{sen}^2(\varphi)]}$

usando el signo positivo de la raíz, ya que $\theta/2$ está acotado al intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$ donde el coseno nunca es negativo. Asimismo, con análogas consideraciones de signo,

$$\cos(\varphi)=\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\varphi)}=\sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2(\theta/2)}{\mathrm{sen}^2(\theta_\mathrm{m}/2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta_\mathrm{m}/2)-\mathrm{sen}^2(\theta/2)}}{\mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)}=\frac{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_\mathrm{m})}}{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)},$$

donde se ha usado la transformación que define φ y el primer desarrollo del denominador. El integrando se transforma entonces así:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_\mathrm{m})}}=\frac{2\,\mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_\mathrm{m})}\cdot d\varphi}{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta_\mathrm{m}/2)\cdot\cos(\theta/2)\cdot\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_\mathrm{m})}}$$

$$=\sqrt{2}\frac{d\varphi}{\cos(\theta/2)}=\sqrt{2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\theta_\mathrm{m}/2)\cdot\mathrm{sen}^2(\varphi)}}.$$

Reemplazando en la primera integral al comienzo de la sección, y teniendo en cuenta lo dicho inicialmente sobre los nuevos límites de integración, se obtiene la segunda integral. Se ve también que resulta

$$\alpha = \theta_\mathrm{m}/2.$$