Concepto de número

La enciclopedia de ciencias y tecnologías en Argentina

Usamos continamente el **concepto de número** pese a que no podemos explicarlo bien ni definirlo con precisión. Sus aplicaciones prácticas exceden largamente nuestra comprensión y sin ellos no serían posibles ciencias exactas como la Física, ninguna de las ingenierías y la mayoría de las tecnologías, incluyendo a todas las industriales. La Economía tampoco sería viable sin ellos, ya que todas las transacciones comerciales se cuantifican con números en términos de unidades de valor de cambio como los pesos ($). La Matemática surgió cuando se sistematizó y amplió el concepto de número y se establecieron con rigor todas las operaciones que se pueden hacer con ellos, primero con fines prácticos (construcciones, cálculo de impuestos, comercio…), después como una disciplina independiente de sus aplicaciones —tema que no se discute aquí—. Sin embargo, la Matemática no explica el *concepto de número*, sólo lo formaliza de modo de evitar errores y contradicciones en su uso, extendiéndolo más allá del concepto inicial de número natural (1, 2, 3.......), base del concepto más general de números reales que incluye a los racionales (fracciones), radicales (raíces de todo orden) y transcendentes como *e* y π (pi). En este artículo se discute sólo el concepto de número natural, fundamento de todos los demás, tratando de poner en evidencia —con fines mayoritariamente docentes— dos de sus rasgos esenciales. El primero es la medida de la cantidad que en Matemática se denomina el *cardinal* de un conjunto de elementos. El segundo es el "grandor relativo" de los diferentes cardinales, cuándo uno es mayor (>) o menor (<) que otro; es decir, el problema de las relaciones numéricas de orden. Durante el desarrollo se discute la independencia de estos dos rasgos, el hecho de que uno de ellos puede estar presente sin el otro.

Contenido

Enfoque de este artículo

El concepto de número puede ser interpretado de modos muy diferentes según quienes lo analicen: psicólogos cognitivos, matemáticos, docentes o personas comunes que sólo quieren estar mejor informadas sobre este concepto tan básico. Es por ello imprescindible discutir del modo más claro posible el enfoque elegido en este artículo.

Los psicólogos cognitivos están interesados en la secuencia temporal en que se desarrollan las destrezas cognitivas de las personas, en especial los niños. A partir de los trabajos pioneros del biólogo suizo Jean Piaget en las décadas de 1930 y 1940 (véase, especialmente, *Génesis del número en el niño*), el concepto de número ha sido un continuo tema de investigación (véase, por ejemplo, el trabajo de Brainerd y las críticas que le hicieron otros investigadores). Los desarrollos cognitivos son, a veces, incrementales, es decir, uno de ellos es requisito de otro. Por ejemplo, es imposible hacer experimentos avanzados de cardinalidad —los que exceden las destrezas innatas del niño, véase el *conteo súbito* en la sección siguiente— con un bebé que no ha alcanzado todavía a discernir objetos individuales y a comprender su perdurabilidad en el tiempo (la *conservación de los objetos* de Piaget). Otras veces, en cambio, es posible llegar al mismo concepto por vías diferentes. Algunos experimentos sugieren que en el proceso de formación del concepto de número el concepto de *ordinal* precede al de *cardinal* (caso de Brainerd), mientras otros indican que otras vías pueden estar en juego (caso de Rips y colaboradores).

El concepto de número se desarrolla recién después que el niño es capaz de establecer la permanencia de objetos y diferenciar categorías de ellos. Es decir, cuando puede individualizar objetos y percibir semejanzas y diferencias muy básicas entre ellos. Es entonces cuando puede comprender la agrupación de una o más instancias de una misma categoría de objetos, como piedras, monedas, perros, árboles, personas... Éste es el primer paso de la cuantificación que recién culminará en el concepto matemático de número, concepto que incluye más características que el de la mera diversidad en cantidad. No es que todos los objetos agrupados sean idénticos, es sólo que los sentidos y el cerebro humano tienen la capacidad de percibir y procesar selectivamente ciertos rasgos comunes que permiten la agrupación de los mismos en clases o categorías de modo comunicable a otras personas. Así, dentro de un cierto rango de tamaño, se puede hablar de agrupaciones, en Matemática llamados conjuntos, de "piedritas", como elementos intercambiables que no requieren o deben ser diferenciados unos de otros. Es en este sentido que se usa aquí, en lo sucesivo, el concepto de *elemento*, más general que el de *objeto* (cuerpo material con límites bien definidos). La razón de estos requisitos es que el concepto de número no sólo caracteriza objetos, sino también representaciones de objetos y símbolos que no corresponden a objetos materiales de ningun tipo.

Los matemáticos, por su parte, han fundamentado el concepto de número de dos modos completamente diferentes que no requieren el uno del otro si sólo se atiende al rigor de los procedimientos. El primero de estos modos, introducido en 1884 por el matemático alemán Gottlob Frege, corresponde básicamente al esbozado en la sección siguiente para la determinación del cardinal de un conjunto en base a biyecciones. El segundo —basado en el concepto de orden y en grandes líneas coincidente la la discusión de la sección sobre ese tema— fue introducido por el italiano Giuseppe Peano en 1894, como el siguiente conjunto de cinco axiomas:

1. 1 es un número natural.
2. Cualquier número que es el resultado de sumarle 1 a un número natural (su número siguiente), es también un número natural.
3. No hay dos números naturales diferentes que tengan el mismo número siguiente.
4. El número 1 no es el siguiente de ningún número natural.
5. La serie de los números naturales incluye al número 1 y a los siguientes de todos los números naturales.

Cualquiera de las dos maneras de introducirlos es suficiente para fundamentar las operaciones con números naturales de modo tal que no conduzca a error o contradicción. Esta forma de dar origen a los números no tiene nada que ver con el origen cognitivo del concepto y su secuencia temporal de adquisición por una persona típica de alguna clase social de alguna cultura del planeta (proceso *situado*). Es nada más y nada menos que un requisito para asegurar que no habrá violaciones de la Lógica Matemática, tema completamente diferente.

Los niños no ingresan a la escuela en la etapa inicial de su desarrollo cognitivo, sino en una en que los conceptos y operaciones que aquí se describen ya se han alcanzado y practicado, aunque por regla general con muy diferentes grados de refinamiento por una diferente intensidad de práctica. Entre los objetivos del docente no se cuentan el de investigar etapas de evolución cognitiva ni grados de rigor lógico de los conceptos que fundamentan las operaciones aritméticas. El objetivo es lograr que los niños las incorporen del modo más rápido posible y las lleven a cabo con el mínimo de errores posibles, poniendo a su alcance métodos simples de verificación de la corrección de sus resultados. La secuencia conceptual que aquí se presenta, puesta en práctica con didácticas adecuadas, puede ser un medio eficiente para el logro de este objetivo, aunque probablemente no sea el único viable.

Los números tienen dos rasgos completamente diferentes que es necesario identificar y diferenciar: el cardinal y el ordinal. La combinación de estos rasgos, y otros más, con algunas operaciones que pueden hacerse con ellos, conducen al concepto de número natural, el más sencillo de todos, ordenados en la secuencia creciente 1, 2, 3, 4… Esto conduce luego, de modo bastante similar, a la cuantificación de magnitudes como longitudes, áreas, volúmenes, pesos, cargas eléctricas y otros. La importancia tecnológica de las magnitudes numéricamente cuantificadas es que permiten la formulación de leyes de fenómenos que son la base de desarrollos como la Electrónica y todos los artefactos basados en ella: televisores, computadoras, teléfonos móviles y muchísimos más.

El objetivo de este artículo no es analizar la evolución histórica del estudio del concepto de número, ni en Psicología ni en Matemática, sino establecer de modo fácilmente comprensible por no especialistas —en particular por un docente primario promedio— sus rasgos primordiales. En lo que sigue se discuten los rasgos cardinal y ordinal de los números, base de las operaciones más básicas que se pueden hacer con los números naturales: sumarlos y restarlos. En todos los casos se usará el término *elemento* para ser totalmente abarcativo, pero en el aula deben usarse inicialmente objetos materiales fáciles de conseguir en cantidad, como botones, piedritas, fósforos, porotos, monedas u otros similares. Recién en una segunda etapa pueden usarse representaciones de elementos, como círculos coloreados u otras formas simples. Sólo en la tercera etapa pueden usarse agrupaciones de ideas, símbolos y términos abstractos de cualquier tipo. Inicialmente deben usarse sólo agrupaciones de elementos idénticos, dejando para una etapa más avanzada su constitución con objetos de categorías diversas, genéricamente designadas como elementos para el análisis de su cardinalidad. Ésto no es viable para las operaciones de suma y resta de magnitudes físicas, donde los elementos deben pertenecer a la misma categoría por la misma razón que no se pueden sumar peras a zapatos.

Cardinal de un conjunto

Para facilitar la comprensión del tema se introduce el concepto de cardinal con el ejemplo siguiente.

El jefe de una tribu decide invitar a todos los jefes de familia a una reunión donde se discutirán temas comunes de gran importancia. Para asegurar la buena voluntad de todos y no despertar la enemistad de nadie, quiere hacer a todos y cada uno de ellos un regalo idéntico que debe ser preparado con cierta anticipación. Ninguno de los miembros de la tribu sabe contar, de modo que el jefe no sabe como asegurarse de que la cantidad de regalos será la justa, de modo de no saltearse a nadie ni preparar regalos sin destinatario. Cuando plantea el problema a sus consejeros, el más viejo y sabio de todos —su primer consejero o consejero principal— lo tranquiliza diciéndole que él se ocupará de que no haya ningún error. El jefe deja entonces el asunto en sus manos.

Para llevar a cabo su tarea el primer consejero se provee de bolsos sin agujeros que cuelga de cada uno de sus hombros. El de la izquierda está completamente lleno de porotos desecados, fáciles de transportar y díficiles de extraviar. El de la derecha está vacío. Así aviado parte a visitar, uno por uno, a los jefes de todas las familias de la tribu. Cada vez que invita a uno de ellos saca un poroto del bolso izquierdo y lo coloca en el derecho. Cuando termina de ver a todos lleva el bolso de su hombro derecho a la encargada de confeccionar los regalos, indicándole que debe hacer tantos regalos como porotos contiene.

El primer consejero no necesitó saber contar, ni siquiera necesitó tener un nombre para designar la cantidad de porotos que juntó en el bolso de la derecha. Lo único que hizo fue hacer corresponder un poroto (y sólo uno) a cada jefe de familia, destreza normal de las personas adultas. Lo mismo hizo la encargada de los regalos, haciendo un regalo y sólo uno por cada poroto que le entregaron.

La relación de correspondencia así establecida —que en Matemática se denomina *biyección*—establece la igualdad del cardinal de cada uno de los tres conjuntos comparados: el de los jefes de familia, el de los porotos, el de los regalos. Nótese que el cardinal no es un rasgo propio de un objeto, sino una relación entre un conjunto de referencia que se considera como invariable (en este caso el de los jefes de familia) y otros conjuntos cualesquiera. Como la cardinalidad es un rasgo esencial de los números, ésto nos dice ya que los números no son objetos ni rasgos de objetos, sino construcciones mentales abstractas.

Desde el punto de vista matemático el cardinal tiene dos fundamentos esenciales:

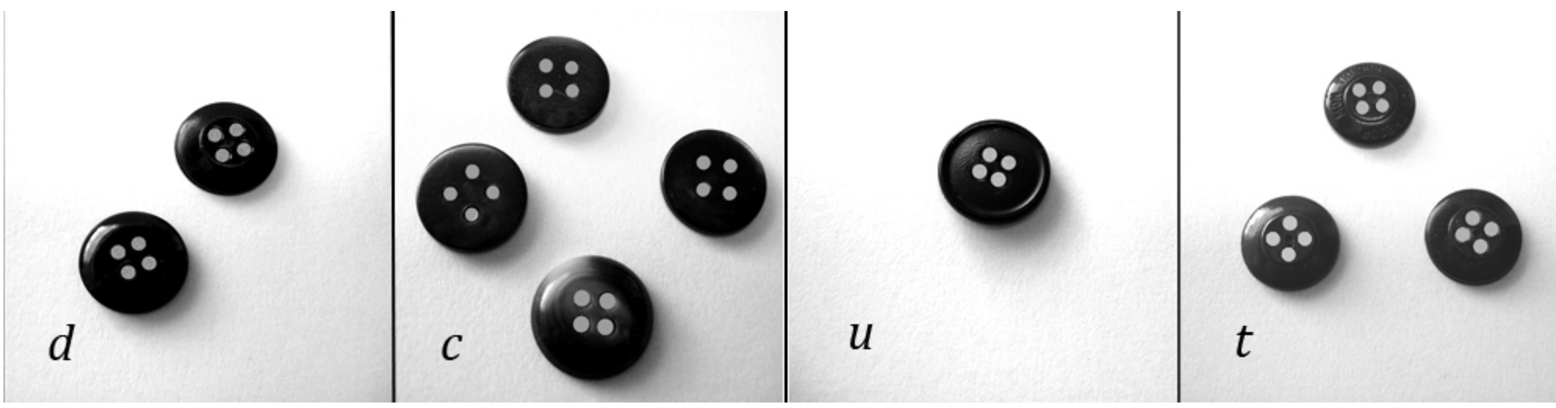
1. El concepto de correspondencia uno a uno entre elementos (*biyección*);
2. El concepto de igualdad de correspondencias. En el ejemplo dado, se requiere la igualdad —mediada por el cardinal de los porotos del bolso de referencia— entre el cardinal del conjunto de jefes de familia y el del conjunto de regalos.

Una buena metáfora del proceso de establecimiento de la correspondencia uno a uno es el conjunto de ojales y botones de una camisa, ya que nadie fabrica una camisa con más ojales que botones o más botones que ojales. Un saco no sirve, ya que sus mangas tienen usualmente botones de adorno, sin ojales. No hay metáfora para el concepto de igualdad, que no es un proceso sino un rasgo básico de la percepción humana.

Grandor relativo de los cardinales

El concepto de cardinal no basta para establecer el concepto de número. La mente humana sólo tiene la capacidad de reconocer de modo instantáneo, sin contar de modo sucesivo, los cardinales 1, 2, 3 y 4, facultad que en inglés se denomina *subitizing*, que puede traducirse como *conteo súbito*. Algunos científicos consideran que podría ser considerado un sentido más, también presente en algunos primates superiores, al que denominan *numerosity* (*numerosidad*)[1]. Para determinar la cardinalidad de grupos más grandes debemos tener un conjunto de referencia de todos los diferentes cardinales (método poco práctico) o numerar sus elementos de modo sucesivo, es decir, contarlos. Es necesario, por ello, analizar detalladamente la relación de orden implícita en un recuento de cualquier tipo de elementos.

Para no introducir los números en una discusión previa a este concepto, bautizaremos a los cardinales de 1 a 4 con *u*, *d*, *t* y *c* (los nombres podrían haber sido otros, no es importante). Se puede hacer lo mismo con la cardinalidad de los conjuntos más frecuentemente útiles, como los que caracterizan la cantidad de hijos, de cabritos, de cacerolas, de flechas… La figura inferior ilustra ésto para sólo unos pocos, ordenados al azar, ya que todavía no hay criterio para hacerlo.



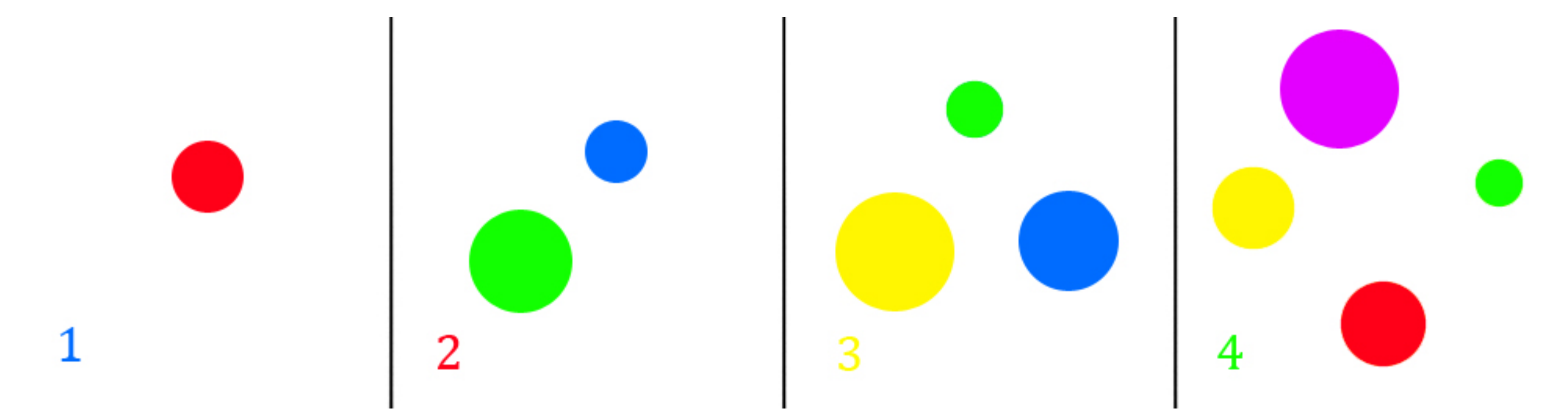
Los cardinales de algunos grupos de botones pasibles de *conteo súbito*.

Un cardinal particular, caracterizado por un conjunto de referencia (concepto similar al de unidad de medida), sólo permite identificar los conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos, aquellos con los que se puede establecer una correspondencia de uno a uno (biyección). No basta, entonces, para lo que habitualmente denominamos *medir*, para lo que se requiere es saber cuál conjunto tiene más (o menos) elementos, tiene un cardinal mayor o menor que el de otro. Veamos cómo se define de modo operativo la relación de mayor o menor.

El cardinal de un conjunto es mayor que el de otro si se puede obtener agregándole al último uno o más elementos. Así, los cardinales de *d*, *t* y *c* son mayores que el cardinal de *u*, porque se obtienen agregando más elementos a éste. Del mismo modo podemos determinar que los de *t* y *c* son mayores que *u* y *d*, y que *c* es mayor que *u*, *d* y *t*. No hay un tope (en Matemática, una *cota superior*) para la cardinalidad de un conjunto, es decir, dado cualquier conjunto siempre se puede construir otro de mayor cardinalidad agregándole elementos.

El cardinal de un conjunto es menor que el de otro si se puede obtener quitándole al último uno o más elementos. Así, los cardinales de *u*, *d* y *t* son menores que el cardinal de *c*, porque se obtienen quitando elementos a éste. Del mismo modo podemos determinar que los de *u* y *d* son menores que el de *t* y *c*, y que el de *u* es menor que el de *d*, *t* y *c*. Aquí aparece un hecho nuevo e importante. No hay agrupación de elementos con cardinal menor que el de *u*, porque si le quito a éste su único elemento no tengo ninguna agrupación. Esta restricción histórica inicial fue posteriormente eliminada de la Matemática extendiendo el nombre de conjunto también a una agrupación sin ningún elemento, cuya cardinalidad (el cero o 0) no se discutirá aquí.

Hacia el concepto abstracto de número



Si un niño no es capaz de asignar correctamente los símbolos a cada uno de estos conjuntos y ordenarlos de modo creciente, no domina el concepto de número.

La siguiente etapa corresponde a otra capacidad intrínseca de los seres humanos (aunque también de algunos primates, como los chimpancés): la simbolización. En este caso corresponde al reemplazo de:

- las agrupaciones de objetos por sus representaciones (en papel o en la pantalla de una computadora, por ejemplo, como en la Figura 2);
- los conjuntos de referencia o sus representaciones, por sus nombres, caso en que recién cobran sentido las denominaciones 1 (en vez de *u*), 2 (*d*), 3 (*t*), 4 (*c*) y así siguiendo;
- las operaciones con conjuntos por sus representaciones o por sus símbolos, como en la figura previa.

Un error común de los docentes que enseñan el concepto es usar figuras idénticas con ordenamientos geométricos regulares. Por ejemplo, círculos del mismo tamaño y color, alineados y espaciados de modo regular. Los estudios cognitivos muestran que en la primera etapa de adquisición del concepto cardinal de número los niños lo asocian con todos los rasgos comunes entre los diferentes conjuntos. Es imprescindinble, por ello, ir descartando progresivamente rasgos comunes hasta que, como se muestra en la figura anterior, sólo quede uno —en el ejemplo ilustrado, el de "círculo", pero podría haber sido el de forma o el de color— que establezca una categoría bien definida.

No se necesita ahora tener conjuntos de referencia, basta tener los símbolos que los representan y memorizar su orden. Se llega recién entonces a la operación de contar, que en la primera etapa, por ejemplo, va acompañada del trazado de palitos con lápiz sobre un papel o de agrupación de pequeños objetos sobre la mesa de trabajo (granitos de arroz, piedritas…). Éste es el comienzo de la Aritmética, ya que su tomamos una agrupación de granitos de arroz con cardinalidad 3 y la agregamos a otra con cardinalidad 4 obtenemos una nueva agrupación con 7 granitos: es decir:

$$3 + 4 = 7.$$

O a la inversa, si sacamos 3 granitos de la última, obtenemos

$$7 - 3 = 4.$$

Fuentes

- Brainerd, Charles J.; *The origins of Number Concepts* (Los orígenes de los conceptos de número); revista Scientific American, vol. 223 Nº 3; EEUU; marzo de 1973; pp. 101-109.
- Lakoff, George & Núñez, Rafael; *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*; Basic Books; New York (USA); 2000; ISBN 9780465037711 (Lakoff&Núñez WMCF). El capítulo 1 cita numerosas evidencias sobre las habilidades numéricas de los niños, incluyendo el *conteo súbito* (pp. 15-26). El capítulo 3 discute las metáforas básicas que subyacen la construcción de las operaciones aritméticas con números enteros y racionales.
- Piaget, Jean; *Génesis del número en el niño*; Edit. Guadalupe; Ciudad de Buenos Aires; 1967. Una breve síntesis del contenido del libro, con muchas referencias adicionales, puede encontrarse en John Flavell, *La psicología evolutiva de Jean Piaget*, Edit. Paidós, Barcelona (España), 1982, ISBN 8475091083, pp. 330-336.
- Rips, Lance J. & Bloomfield, Amber & Asmuth, Jennifer; *From numerical concepts to concepts of number*; revista Behavioral and Brain Sciences, vol. 31; EEUU; 2008; pp. 623687; doi:10.1017/S01 405525X08005566. El artículo contiene numerosas referencias así como adhesiones y refutaciones a los experimentos citados.

Véase también

1. Concepto de número
2. Enseñanza de la Matemática
3. Enseñanza del concepto de área
4. Historia de la enseñanza de la Matemática en Argentina
5. Olimpíada Internacional de Matemática
6. Origen de la Matemática
7. Rompecabezas geométricos
8. Simetrías
